2015 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選初賽 個人賽試題

________縣市________國民中學____年級　編號：________　姓名：__________

作答時間: 二 小 時　　　　　　　　　　　　　　　　　　　性別: □男 □女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；答案若為分數，請化為最簡分數)

1. 設 $P=77^{2015}+33^{2015}$，則 P 的最末一位數碼為__________。

【參考解法】

因 $77=70+7$、$33=30+3$，故可推知 77^n 的個位數碼與 7^n 的個位數碼相同、33^m 的個位數碼與 3^m 的個位數碼相同。而7的冪次方的個位數碼是由7、9、3、1這四個數碼依序循環出現，3的冪次方的個位數碼是由3、9、7、1這四個數碼依序循環出現，且再因 $2015=4\times503+3$，故可判斷知P的個位數碼與 7^3+3^3 相同，即為$3+7=10$的個位數碼0。

答：0

2. 有濃度為 2.6%的糖水若干公克，加入 n 公克清水後，糖水濃度變成 2%。若再加入 n 公克清水後，則糖水濃度會變成__________%。(換算成百分比後，以四捨五入計算至小數點以下第二位)

【參考解法】

設原有2.6%的糖水x公克，則可知 $\dfrac{0.026x}{x+n}=\dfrac{2}{100}$，化簡後可得 $n=0.3x$，因此再加入n公克清水後，則糖水濃度會變成 $\dfrac{0.026x}{x+2n}=\dfrac{0.026}{1.6}=0.01625\approx1.63\%$。

答：1.63%

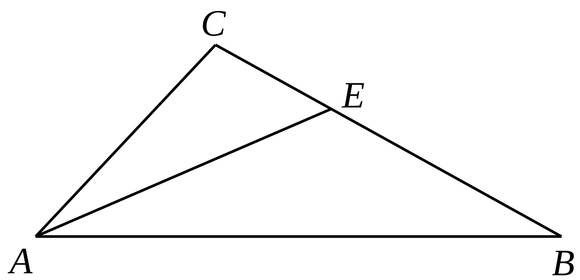
3. 設 $N=\overline{a2015b}$ 為一個六位數，若 N 為 72 的倍數，則 $a\times b=$__________。

【參考解法】

因 $72=8\times9$，故N同時為8與9的倍數。由N為8的倍數可得知N的末三位數碼所形成的數 $\overline{15b}$ 為8的倍數，因此 $b=2$；由N為9的倍數可得知N的數碼和 $a+2+0+1+5+2=a+10$ 為9的倍數，因此 $a=8$。故 $a\times b=16$。

答：16

4. 在$\triangle ABC$ 中， 已知 $AC:AB=1:2$，$\angle A$的平分線交 BC 於 E，設$\triangle ABC$ 的面積為 P，$\triangle AEC$ 的面積為 Q，則 $P:Q=$ _____ : _____。



【參考解法一】

由內角平分線定理可知$\frac{CE}{BE}=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$，因此$\triangle AEC$的面積為$\triangle ABC$的面積的$\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$，即$P:Q=3:1$。

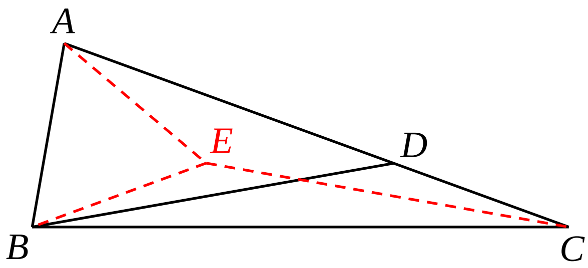
【參考解法二】

由共角定理可知$\triangle AEC$面積與$\triangle ABE$面積的比為$\frac{AC\times AE}{AB\times AE}=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$，由此可以得知$\triangle AEC$的面積為$\triangle ABC$的面積的$\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$，即$P:Q=3:1$。

答：3：1

5. 如圖，已知$\angle C=20°$、$AC=BC$、$CD=AB$，則$\angle BDC$的度數為 ______ 。

【參考解法】



可知$\angle BAC=\angle ABC=80°$。

如圖，在三角形ABC內部取一點E使得三角形ABE為正三角形。

因$CE=CE$、$AC=BC$、$AE=BE$，故可得$\triangle AEC\cong\triangle BEC$，

因此$\angle ACE=\angle BCE=\frac{1}{2}\angle ACB=10°$；

再因$\angle EAC=\angle BAC-\angle BAE=80°-60°=20°$，

故知$\angle AEC=180°-10°-20°=150°$；

現因$\angle EAC=20°=\angle BCD$、$AE=AB=CD$、$AC=BC$，

故可得$\triangle AEC\cong\triangle CDB$，因此$\angle BDC=\angle CEA=150°$。

答：150°

6. 設$M=\overline{a_1a_2a_3a_4}$為一正整數，且滿足$5\times\overline{4a_1a_2a_3a_41}=9\times\overline{2a_1a_2a_3a_45}$，則正整數$M=$ ________ 。

【參考解法】

因$5\times\overline{4a_1a_2a_3a_41}=5\times(400000+10M+1)$、$9\times\overline{2a_1a_2a_3a_45}=9\times(200000+10M+5)$，故可得

$$5\times(400000+10M+1)=9\times(200000+10M+5)$$

$$2000000+50M+1=1800000+90M+45$$

$$40M=200000-40$$

$$M=4999$$

答：4999

7. 設 a、b、c 皆為正整數，且 $a \ge b \ge c$ 並滿足 $a+b+c=19$，則以 a、b、c 為邊長的三角形共有__________個。

【參考解法】

因 $a \ge b \ge c$ 且 $a+b+c=19$，故可判斷知 $a \ge \frac{1}{3} \times 19 > 6$；再因三角形的任二邊之長度和恆大於第三邊之長度，故知 $b+c>a$，因此可判斷知 $a \le 9$。所以 a 的可能值為7、8或9。若 $a=7$，則有 $b+c=12$，故 (b,c) 可為 $(7,5)$ 或 $(6,6)$；若 $a=8$，則有 $b+c=11$，故 (b,c) 可為 $(8,3)$、$(7,4)$ 或 $(6,5)$；若 $a=9$，則有 $b+c=10$，故 (b,c) 可為 $(9,1)$、$(8,2)$、$(7,3)$、$(6,4)$ 或 $(5,5)$。因此共有 $2+3+5=10$ 個滿足題意的三角形。

答： 10個

8. 已知 P 為完全平方數，且 $P+99$ 也是完全平方數，若 P 所有可能的值之總和為 Q，則 $Q=$__________。

【參考解法】

若令 $P=x^2$、$P+99=y^2$，則可知 $99=y^2-x^2=(y-x)(y+x)$。因 $y+x>y-x$ 且 $99=1\times 99=3\times 33=9\times 11$，故：

(i) $y-x=1$、$y+x=99$：

此時 $y=\dfrac{99+1}{2}=50$、$x=\dfrac{99-1}{2}=49$，即 $P=49^2=2401$；

(ii) $y-x=3$、$y+x=33$：

此時 $y=\dfrac{33+3}{2}=18$、$x=\dfrac{33-3}{2}=15$，即 $P=15^2=225$；

(iii) $y-x=9$、$y+x=11$：

此時 $y=\dfrac{11+9}{2}=10$、$x=\dfrac{11-9}{2}=1$，即 $P=1^2=1$；

因此 $Q=2401+225+1=2627$。

答：2627

9. 設數列 $<a_n>$ 滿足 $a_1=1$、$a_2=2$、$a_3=6$、$a_4=24$。若 $a_{n+2}\times a_{n-2}=a_{n+1}^2$，其中 n 為正整數且 $n\ge 3$，則 $\dfrac{a_{104}}{a_{103}\times a_{102}\times a_{101}}=$__________。

【參考解法】

$$\frac{a_{104}}{a_{103}\times a_{102}\times a_{101}}=\frac{a_{104}\times a_{100}}{a_{103}\times a_{102}\times a_{101}\times a_{100}}=\frac{a_{103}\times a_{103}}{a_{103}\times a_{102}\times a_{101}\times a_{100}}=\frac{a_{103}}{a_{102}\times a_{101}\times a_{100}}$$

$$=\frac{a_{103}\times a_{99}}{a_{102}\times a_{101}\times a_{100}\times a_{99}}=\frac{a_{102}\times a_{102}}{a_{102}\times a_{101}\times a_{100}\times a_{99}}=\frac{a_{102}}{a_{101}\times a_{100}\times a_{99}}$$

$$\vdots$$

$$=\frac{a_4}{a_3\times a_2\times a_1}=\frac{24}{6\times 2\times 1}=2$$

答：2

10. 設 n 為正整數，且$3\le n\le 20$，若α_n 、 β_n 為二次方程$x^2+(n+1)x+n^2=0$的兩個根，則$\dfrac{1}{(\alpha_3+1)(\beta_3+1)}+\dfrac{1}{(\alpha_4+1)(\beta_4+1)}+\cdots+\dfrac{1}{(\alpha_{20}+1)(\beta_{20}+1)}$之值為__________。

【參考解法】

由根與係數的關係可知$\alpha_n+\beta_n=-(n+1)$ 、 $\alpha_n\beta_n=n^2$ ，因此有

$$\frac{1}{(\alpha_3+1)(\beta_3+1)}+\frac{1}{(\alpha_4+1)(\beta_4+1)}+\cdots+\frac{1}{(\alpha_{20}+1)(\beta_{20}+1)}$$

$$=\frac{1}{\alpha_3\beta_3+\alpha_3+\beta_3+1}+\frac{1}{\alpha_4\beta_4+\alpha_4+\beta_4+1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{20}\beta_{20}+\alpha_{20}+\beta_{20}+1}$$

$$=\frac{1}{3^2-(3+1)+1}+\frac{1}{4^2-(4+1)+1}+\cdots+\frac{1}{20^2-(20+1)+1}$$

$$=\frac{1}{3^2-3}+\frac{1}{4^2-4}+\cdots+\frac{1}{20^2-20}$$

$$=\frac{1}{3(3-1)}+\frac{1}{4(4-1)}+\cdots+\frac{1}{20(20-1)}$$

$$=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{19}-\frac{1}{20})$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{20}$$

$$=\frac{9}{20}=0.45$$

答：$\dfrac{9}{20}=0.45$

11. 設 k 為整數。若二次方程$10x^2-6(k+1)x+k^2-41=0$有兩個相異的負整數根，則$k=$________。

【參考解法】

方程式的兩根為相異的負整數，故由根與係數的關係知$\dfrac{6(k+1)}{10}\le -3$且$\dfrac{k^2-41}{10}\ge 2$，即$k<-1$且$k^2>61$，因此可推知$k<-8$；

而方程式的判別式為

$$(-6(k+1))^2-4\times 10\times(k^2-41)=-4k^2+72k+1676=4(500-(k-9)^2)\text{ 。}$$

因此方程式的兩根為整數，故可得知其判別式為一完全平方數，即$500-(k-9)^2$是一個完全平方數。

因小於500的完全平方數有$1^2=1$、$2^2=4$、$3^2=9$、$4^2=16$、$5^2=25$、$6^2=36$、$7^2=49$、$8^2=64$、$9^2=81$、$10^2=100$、$11^2=121$、$12^2=144$、$13^2=169$、

$14^2=196$、$15^2=225$、$16^2=256$、$17^2=289$、$18^2=324$、$19^2=361$、$20^2=400$、$21^2=441$、$22^2=484$，故知僅有 $4^2+22^2=10^2+20^2=500$，因此由 $k<-8$ 可判斷知 k 可能為 $-22+9=-13$ 與 $-20+9=-11$。

若 $k=-13$，則原方程式可化簡為 $5x^2+36x+64=0$，可判斷出兩根之積是 $\frac{64}{5}$，此不為整數，矛盾；

若 $k=-11$，則原方程式可化簡為 $x^2+6x+8=0$，得兩根分別為 -2、-4。

因此 $k=-11$。

答：-11

12. 設直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$ 且 $BC>CA$，若 $s=\frac{BC}{AB}$ 且 $t=\frac{CA}{AB}$，並且滿足 $\frac{st}{s+t-1}=\frac{15}{13}$，則 $s-2t$ 之值為__________。

【參考解法】

由勾股定理可知 $s^2+t^2=1$，故可得知 $st=\frac{1}{2}((s+t)^2-(s^2+t^2))=\frac{1}{2}((s+t)^2-1)$，

所以有 $\frac{15}{13}=\frac{\frac{1}{2}((s+t)^2-1)}{s+t-1}$，化簡可得 $13(s+t)^2-30(s+t)+17=0$，因式分解後知 $((s+t)-1)(13(s+t)-17)=0$，即 $s+t=1$ 或 $s+t=\frac{17}{13}$，但 $s+t=1$ 會使 $\frac{st}{s+t-1}$ 的分母為0，故僅可取 $s+t=\frac{17}{13}$，此時 $st=\frac{15}{13}\times(\frac{17}{13}-1)=\frac{60}{13^2}$，即 $s=\frac{60}{13^2\times t}$，代回 $s+t=\frac{17}{13}$ 後可得

$$\frac{60}{13^2\times t}+t=\frac{17}{13}$$

$$13^2t^2-17\times13t+60=0$$

$$(13t-5)(13t-12)=0$$

故可得知 $t=\frac{5}{13}$ 或 $\frac{12}{13}$。因 $s>t$，故知須取 $t=\frac{5}{13}$，而 $s=\frac{12}{13}$，即 $s-2t=\frac{2}{13}$。

答：$\frac{2}{13}$

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 請求出所有正實數 a 使得方程 $x^2-2ax+8a=0$ 只有整數根。

【參考解法】

因方程式 $x^2-2ax+8a=0$ 只有整數根，故其判別式恆為完全平方數，即 $(-2a)^2-4\times8a=4a^2-32a=4a(a-8)\geq0$，故可推得 $a\geq8$。

若令 $x^2-2ax+8a=0$ 的兩整數根分別為 α、β，則利用根與係數的關係可知 $\alpha\beta=8a$、$\alpha+\beta=2a$，將 $\beta=\dfrac{8}{\alpha}a$ 代入 $\alpha+\beta=2a$ 即可得

$$a=\frac{\alpha^2}{2\alpha-8}=-\frac{1}{2}\alpha+2+\frac{16}{2\alpha-8}。$$

因已知 a 為正實數且 $\alpha^2\geq0$，故有 $2\alpha-8>0$，即 $\alpha>4$；再由 $-\dfrac{1}{2}\alpha$ 為 $\dfrac{1}{2}$ 的整數倍可判斷出當 $2\alpha-8>16$ 時，即當 $\alpha>12$ 時，$\dfrac{16}{2\alpha-8}$ 只可為 $\dfrac{1}{2}$，即 $\alpha=20$：

(i) 若 $\alpha=5$，則 $a=\dfrac{5^2}{2\times5-8}=\dfrac{25}{2}=12\dfrac{1}{2}>8$，此時 $\beta=20$；

(ii) 若 $\alpha=6$，則 $a=\dfrac{6^2}{2\times6-8}=\dfrac{36}{4}=9>8$，此時 $\beta=12$；

(iii) 若 $\alpha=7$，則 $a=\dfrac{7^2}{2\times7-8}=\dfrac{49}{6}>8$，此時 $\beta=\dfrac{28}{3}$，矛盾；

(iv) 若 $\alpha=8$，則 $a=\dfrac{8^2}{2\times8-8}=\dfrac{64}{8}=8$，此時 $\beta=8$；

(v) 若 $\alpha=9$，則 $a=\dfrac{9^2}{2\times9-8}=\dfrac{81}{10}>8$，此時 $\beta=\dfrac{36}{5}$，矛盾；

(vi) 若 $\alpha=10$，則 $a=\dfrac{10^2}{2\times10-8}=\dfrac{100}{12}>8$，此時 $\beta=\dfrac{20}{3}$，矛盾；

(vii) 若 $\alpha=11$，則 $a=\dfrac{11^2}{2\times11-8}=\dfrac{121}{14}>8$，此時 $\beta=\dfrac{20}{3}$，矛盾；

(viii) 若 $\alpha=12$，則 $a=\dfrac{12^2}{2\times12-8}=\dfrac{144}{16}=9>8$，此時 $\beta=6$；

(ix) 若 $\alpha=20$，則 $a=\dfrac{20^2}{2\times20-8}=\dfrac{400}{32}=\dfrac{25}{2}>8$，此時 $\beta=5$。

因此 a 的值可為 $\dfrac{25}{2}=12\dfrac{1}{2}=12.5$、9或8。

答：$\dfrac{25}{2}=12\dfrac{1}{2}=12.5$、9 或 8

2. 已知正整數 x_1、x_2、…、x_{17} 滿足 $x_1 < x_2 < \cdots < x_{17}$，且

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{17}^2 \le 20150，$$

請問 $x_{13} - x_8$ 的最大值是什麼？

【參考解法】

為了求出 $x_{13} - x_8$ 的最大值，需使 x_{13} 儘可能大而 x_8 儘可能小。

因 $1 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_8$，故知 $x_8 \ge 8$。此時可令 $x_i = i$，其中 $1 \le i \le 12$，則 $x_8 = 8$ 且有 $1^2 + 2^2 + \cdots + 12^2 = 650$；而另一方面，現已知 $x_{13} < x_{14} < x_{15} < x_{16} < x_{17}$，且有 $63 < \sqrt{20150 \div 5} < 64$，故可考慮取 $x_{13} = 60$、$x_{14} = 61$、$x_{15} = 62$、$x_{16} = 63$ 以及 $x_{17} = 64$，此時可得

$$60^2 + 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 = 19230 < 20150 - 650 = 19500；$$

而若取 $x_{13} = 61$、$x_{14} = 62$、$x_{15} = 63$、$x_{16} = 64$ 以及 $x_{17} = 65$ 時，可得

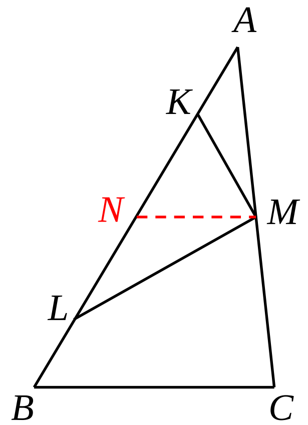
$$61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2 = 19855 > 20150 - 650 = 19500。$$

因此知 x_{13} 的最大值為 60，故 $x_{13} - x_8$ 的最大值為 $60 - 8 = 52$。

答：52

3. 在△ABC 的 AB 邊上有 K 與 L 二個點，滿足 $KL = BC$ 及 $AK = LB$。已知點 M 為 AC 邊上的中點，請證明 $\angle KML = 90°$。

【參考解法 1】

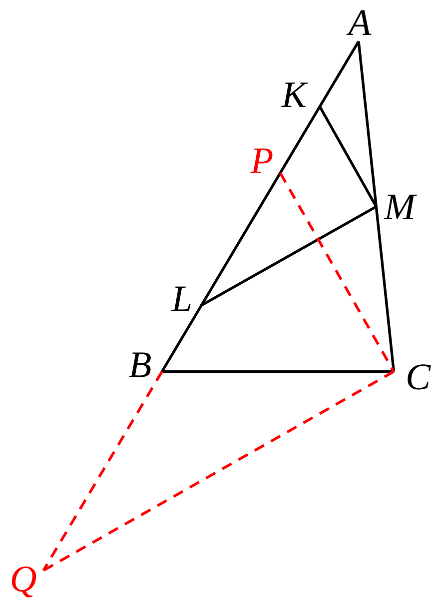


取 KL 的中點 N 並連接 MN，可知

$NA = NK + KA = NL + LB = NB$，

所以點 N 也是 AB 的中點，故有 $MN = \dfrac{1}{2}BC$，而由 N 為 KL 中點知 $NK = NL = \dfrac{1}{2}KL = \dfrac{1}{2}BC$，即點 N 為三角形 KLM 的外接圓圓心，因此知 $\angle KML = 90°$。

【參考解法 2】



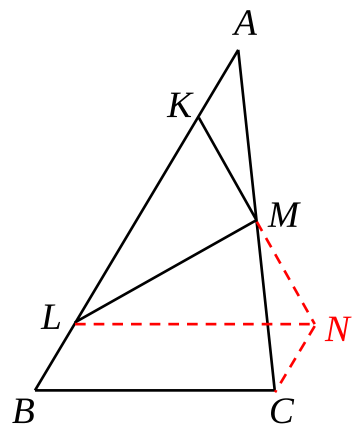
如圖，在 AB 邊上取點 P 並在 AB 的延長線上取點 Q 使得 $BP = BQ = BC$。可知點 B 為三角形 CPQ 的外接圓圓心，因此知 $\angle PCQ = 90°$。現因

$AL = AK + KL = LB + BC = LB + BQ = LQ$，故知

$KP = KB - BP = KB - BC = KB - KL = LB = AK$，

再因 $AM = MC$，所以 KM 與 PC 平行且 LM 與 QC 平行，即可推得 $\angle KML = \angle PCQ = 90°$。

【參考解法 3】



如圖，在 KM 的延長線上取點 N 使得 $KM=MN$ 。連結 LN、NC。

因已知點 M 為 AC 中點，故有 $AM=MC$ ；

再因 $KM=MN$ 、 $\angle KMA=\angle NMC$ ，

故可推得$\triangle AMK\cong\triangle CMN$，

所以知 $NC=KA=BL$ 且 $\angle KAM=\angle NCM$ ，

因此可再推得 $NC//BL$，

故知四邊形 $BCNL$ 為平行四邊形，

即知 $LN=BC=LK$ ，

故$\triangle LNK$ 為等腰三角形且 M 為底邊 KN 的中點，因此知 $LM\perp KN$，

即得 $\angle KML=90°$ 。